

# Uma proposta experimental para o estudo de oscilações acopladas usando um simulador de propagação de ondas mecânicas em meios sólidos

An experimental proposal for the study of coupled oscillations using a mechanical-wave spread simulator in a solid media

Tiago Clarimundo Ramos<sup>1</sup>, Gustavo Quereza<sup>1</sup>, Salmon Landi Jr<sup>\*1</sup>

<sup>1</sup>Instituto Federal Goiano, Rio Verde, GO, Brasil

Recebido em 19 de agosto de 2019. Revisado em 08 de novembro de 2019. Aceito em 18 de novembro de 2019

Neste artigo, apresentamos inicialmente um aparato, construído com materiais de fácil acesso, que pode ser empregado no estudo da lei de Hooke utilizando-se anéis de garrafa PET. Nesta fase da experimentação, esperamos que o professor reconheça junto aos seus estudantes que um anel mais largo possui constante elástica maior do que outro mais estreito. Na sequência, propomos um modelo em termos de osciladores massa-mola acoplados para avançar nas análises do comportamento de um conjunto de fileiras suspensas constituídas de chumbadas conectadas por anéis de garrafa PET, designado na literatura como simulador de propagação de ondas mecânicas em meios sólidos. Demonstramos que o quadrado das frequências dos modos normais de oscilação é proporcional à constante elástica ( $k$ ) do anel dividida pela massa ( $m$ ) da chumbada, independentemente da quantidade de anéis e chumbadas. Assim sendo, quanto maior a razão  $k/m$  menor o tempo de uma oscilação. Apresentamos, inclusive, diversos resultados de medidas como período, frequência, constante elástica e massa, acompanhados de análises das relações entre as grandezas envolvidas. Concluímos que este estudo traz contributos significativos aos professores que atuam no ensino de Física, especialmente em razão de empregar o simulador de ondas na problematização experimental das oscilações acopladas.

**Palavras-chave:** lei de Hooke, oscilações, osciladores massa-mola acoplados, modos normais, ensino de Física.

On this paper, we initially present an apparatus, constructed with easy-access materials that may be applied in the Hooke's law study by using PET bottle rings. At this experimentation's stage, we hope the teacher identifies along with his/her students that a broader ring has a longer elastic constant than the narrower one. Following from this, we propose a model in terms of coupled spring-mass oscillators to move forward towards the behavior analyses of a set of elevated rows comprising sinker weights connected by PET bottle rings, named in literature mechanical-wave spread simulator in a solid media. It is shown that the square of the oscillation normal modes' frequencies is proportional to the ring's spring constant ( $k$ ) divided by the mass ( $m$ ) of the sinker regardless of the number of rings or sinkers. Therefore, the greater the ratio  $k/m$ , the shorter the oscillation time is. We also introduce several measurement results such as period, frequency, elastic constant and mass, accompanied by a series of analysis of the relations between the quantities involved. We conclude that this study brings significant contributions to Physics teachers, especially due to the use of the wave simulator in the experimental problematization of coupled oscillations.

**Keywords:** Hooke's law, oscillations, coupled spring-mass oscillators, normal modes, Physics teaching.

## 1. Introdução

Neste artigo, revisitamos o trabalho de Piubelli, Errobidart, Govara e Errobidart [1] que propõe um dispositivo que simula a influência das propriedades elásticas e inerciais do meio na velocidade de propagação de ondas mecânicas longitudinais. O aparato em questão é constituído de três fileiras, suspensas por fios, em que cada uma é composta por uma sequência alternada de dez chumbadas de pesca e nove anéis de garrafa PET, além de um pêndulo utilizado para impulsionar as três fileiras

no mesmo instante (Figura 1). Nas fileiras designadas 1 e 2, as chumbadas têm o mesmo tamanho, porém anéis de largura iguais a 25 mm e 16 mm, respectivamente. Já nas fileiras 2 e 3, os anéis são de mesma largura (16 mm), mas as chumbadas da fileira 2 são menores do que as da fileira 3.

A experiência proposta pelos autores consiste em produzir um impulso nas três fileiras ao mesmo tempo e verificar o efeito do mesmo ao longo de cada uma. Para isso, uma régua de madeira, após ser golpeada por um pêndulo, impulsiona levemente a chumbada da extremidade de cada fileira no mesmo instante. Na extremidade

\*Endereço de correspondência: salmon.landi@ifgoiano.edu.br



**Figura 1:** Réplica do aparato constituído por chumbadas de pesca suspensas e conectadas por anéis de garrafa PET, denominado simulador de propagação de ondas mecânicas em meios sólidos [1]. Fileira 1 ao fundo e fileira 3 à frente.

oposta de cada fileira, a última chumbada está em contato com uma outra, que por sua vez está equilibrada por um suporte (seringa sem o êmbolo).

Ante ao exposto, a questão que nos inquieta é a seguinte: por que após impulsionarmos simultaneamente as chumbadas das extremidades das três fileiras, a primeira chumbada que cai é aquela na outra extremidade da fileira 1? Observamos que só depois de alguns instantes, cai a chumbada posta na extremidade da fileira 2; e a última a cair é a que estava em contato com a fileira 3.

Acreditamos que estes resultados são satisfatoriamente explicados se cada fileira for considerada como um conjunto de osciladores massa-mola acoplados (Figura 2). Embora cada fileira do aparato da Figura 1 apresente supostamente anéis e chumbadas idênticas, inicialmente, para fins de análise, assumiremos que numa mesma fileira os anéis possuem constante elástica ( $k$ ) diferentes e as chumbadas sejam de massas ( $m$ ) diferentes.

Não obstante, em um primeiro momento, propomos a realização de algumas experiências a fim de verificar se de fato os anéis de larguras diferentes possuem constante elástica diferentes. Na sequência, nos dedicamos a apresentar uma discussão possível de ser desenvolvida sobre as oscilações acopladas a partir da experimentação com o simulador de propagação de ondas mecânicas em meios sólidos (Figura 1). Salientamos que este aparato foi proposto há quase uma década, entretanto, até o momento, não houve trabalho com nova abordagem teórica

para a interpretação dos diferentes intervalos de tempo em que a chumbada colocada no final de cada fileira leva para começar a cair.

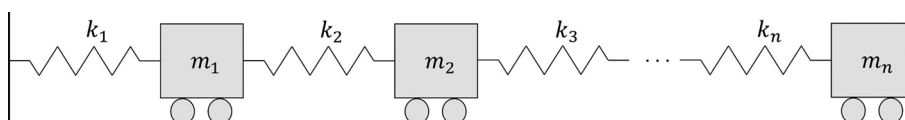
Ademais, realçamos que este estudo traz avanços significativos ao trabalho anterior de Piubelli et al. [1], especialmente em razão de empregar o simulador de ondas na problematização experimental das oscilações acopladas tão relevante para o ensino de Física em cursos de graduação nas áreas de Ciências Exatas, da Terra e Engenharias. Apresentamos, inclusive, diversos resultados de medidas como período, frequência, constante elástica e massa, acompanhados de análises das relações entre as grandezas envolvidas.

## 2. Determinação da constante elástica dos anéis de garrafa PET

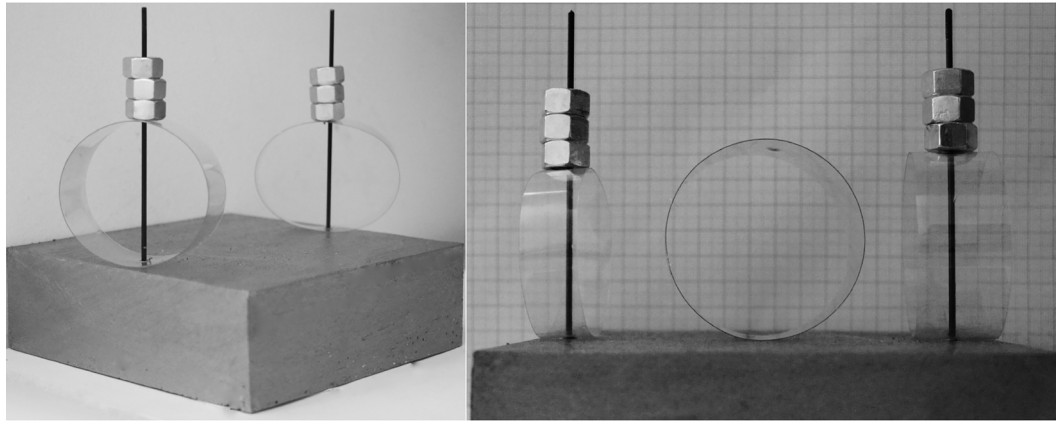
Uma vez que os anéis de garrafa PET utilizados no aparato da Figura 1 possuem dois furos separados diametralmente, construímos um dispositivo composto por uma base de madeira e duas hastes verticais, obtidas de um raio de bicicleta, que permite determinar a constante elástica dos anéis (Figura 3). Para este fim, adicionamos diferentes quantidades de porcas metálicas sobre cada anel e medimos as respectivas deformações com o auxílio de uma régua milimetrada. Os resultados destes ensaios estão apresentados na Figura 4.

O valor da ordenada corresponde ao módulo do peso das porcas, pois esta força é equilibrada pela força elástica exercida pelo anel. Por comodidade, expressamos a força em unidades de grama-força (gf). Vale enfatizar que as massas das porcas (em gramas) foram determinadas utilizando-se uma balança que fornece quatro casas decimais, por este motivo as barras de erro na vertical não estão visíveis. Os resultados mostrados na Figura 4 podem ser analisados em termos de uma relação linear entre a força elástica e a correspondente deformação do anel. Os respectivos ajustes foram realizados com o uso do software Origin [2].

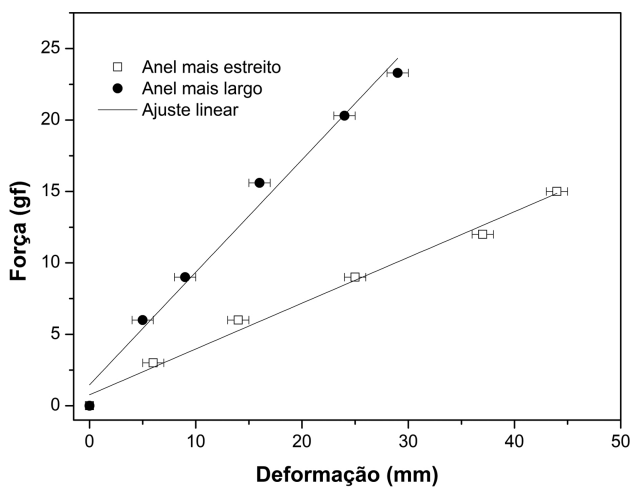
A partir dos coeficientes angulares das retas de ajuste encontramos que a constante elástica vale, para o anel mais largo  $0,86 \pm 0,03$  gf/mm e, para o anel mais estreito,  $0,34 \pm 0,01$  gf/mm. O coeficiente linear obtido em cada caso é, em geral, desprezado neste tipo de análise por não ter significado físico [3], a não ser o fato de que esteja relacionado com as incertezas associadas às medidas. Nesta fase introdutória da investigação, orientamos o professor a problematizar com os seus estudantes não apenas a constatação (ou não) da lei de Hooke nos ensaios



**Figura 2:** Modelo utilizado para representar cada uma das fileiras do aparato da Figura 1. As rodas que supostamente deslizam sem atrito desempenham a mesma função dos fios que mantêm as chumbadas suspensas.



**Figura 3:** Dispositivo utilizado para determinar a constante elástica dos anéis de garrafa PET. Os anéis têm diâmetros iguais, porém larguras diferentes.



**Figura 4:** Força exercida pelo anel de garrafa PET em função de sua respectiva deformação. Largura dos anéis: 16 mm e 25 mm. Diâmetro dos anéis: 58 mm.

de deformação com os anéis, mas que possa aproveitar para levá-los, sobretudo, a reconhecer os resultados para a constante elástica nas diferentes fileiras do protótipo mostrado na Figura 1.

### 3. Modelagem do sistema da Figura (1) como uma proposta para o estudo do oscilador massa-mola acoplado

De acordo com Silva e Catelli, os modelos científicos são entendidos como idealizações da realidade [4]. Assim, cabe ao cientista decidir por hipóteses que representam os principais aspectos do objeto de estudo. Neste sentido, aplicamos a segunda lei de Newton para cada carrinho ilustrado na Figura 2, considerando que os anéis de garrafa PET obedecem a lei de Hooke e desprezando todas as demais forças que atuam na horizontal, exceto a força elástica.

No caso particular de um único carrinho ( $m_1 = m$ ) e uma só mola ( $k_1 = k$ ), a segunda lei de Newton fornece a equação que descreve o movimento oscilatório desse sistema:

$$-kx = m\ddot{x}, \tag{1}$$

em que  $x$  é a deformação da mola e  $\ddot{x}$  é a sua derivada de segunda ordem em relação ao tempo, ou seja, a aceleração do carrinho. A solução da equação (1) está presente em diversos livros de Física do ensino superior [5,6], podendo ser representada em termos de uma função senoidal da seguinte forma:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \delta), \tag{2}$$

em que  $A$  é a amplitude do movimento e  $\delta$  é a constante de fase, a qual está relacionada com o valor de  $x$  no instante inicial ( $t = 0$ ). Neste caso, o sistema possui apenas uma frequência de oscilação:

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}. \tag{3}$$

Por outro lado, considerando que o sistema seja constituído por dois carrinhos e duas molas, sendo  $m_1 = m_2 = m$ ,  $k_1 = k_2 = k$  e aplicando-se novamente a segunda lei de Newton, obtém-se as seguintes equações para cada carrinho:

$$-kx_1 + k(x_2 - x_1) = m\ddot{x}_1 \tag{4a}$$

$$-k(x_2 - x_1) = m\ddot{x}_2, \tag{4b}$$

em que  $x_i$  representa a deformação da mola  $i$  a partir da posição de equilíbrio. Este sistema de equações diferenciais pode ser resolvido considerando-se que os dois carrinhos oscilam simultaneamente com uma mesma frequência ( $\omega$ ) num movimento harmônico simples [7], de forma que:

$$\ddot{x}_i = -\omega^2 x_i. \tag{5}$$

Assim, a equação (4) pode ser convenientemente escrita numa forma matricial

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} -2+\omega^2 & 1 \\ 1 & -1+\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (6)$$

a qual permite obter as possíveis frequências dos denominados modos normais de oscilação do sistema:

$$\omega_1 = \left( \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \right) \omega_0 \quad (7a)$$

$$\omega_2 = \left( \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \right) \omega_0. \quad (7b)$$

Pode-se mostrar também que no modo 1 os carrinhos oscilam em fase (isto é, o movimento de ambos ocorre sempre no mesmo sentido) com a frequência  $\omega_1$ , porém a amplitude do carrinho de  $m_2$  é cerca de 1,62 vezes a do carrinho de  $m_1$ . Por outro lado, no modo 2 os carrinhos oscilam exatamente fora de fase (isto é, o movimento de ambos ocorre sempre em sentidos opostos) com a frequência  $\omega_2$ , porém a amplitude do carrinho de  $m_2$  é cerca de 0,62 vezes a do carrinho de  $m_1$ .

Analisando-se agora um conjunto composto por  $n$  carrinhos idênticos e  $n$  molas idênticas e aplicando-se a segunda lei de Newton para cada carrinho, obtêm-se um conjunto de  $n$  equações, as quais podem ser convenientemente apresentadas como:

$$a_{11}kx_1 + a_{12}kx_2 = m\ddot{x}_1 \quad (8a)$$

$$a_{21}kx_1 + a_{22}kx_2 + a_{23}kx_3 = m\ddot{x}_2 \quad (8b)$$

⋮

$$a_{i+1i}kx_{i-1} + a_{ii}kx_i + a_{ii+1}kx_{i+1} = m\ddot{x}_i \quad (8c)$$

⋮

$$a_{nn}kx_n = m\ddot{x}_n, \quad (8d)$$

em que os coeficientes  $a_{ij}$  são números inteiros que utilizamos para escrever a equação de movimento de cada carrinho de uma forma sintética e que dependem do sistema em questão. Por exemplo, para o caso de um carrinho e uma mola  $a_{11} = -1$  (equação (1)) e todos os outros  $a_{ij}$  são nulos. Já o caso de dois carrinhos e duas molas  $a_{11} = -2$ ,  $a_{12} = a_{21} = 1$  e  $a_{22} = -1$  (equação (4)) e todos os outros  $a_{ij}$  são nulos.

Considerando-se soluções harmônicas para a equação (8) com todos os carrinhos oscilando com a mesma frequência  $\omega$  (equação (5)), obtêm-se um conjunto de  $n$  equações lineares, que podem ser dispostas em forma

matricial:

$$\omega_0^2 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ = -\omega^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (9)$$

ou de maneira compacta como uma equação de autovalor:

$$\left( \omega_0^2 \vec{a} + \omega^2 \vec{I} \right) \vec{x} = 0, \quad (10)$$

em que  $\vec{a}$  é a matriz (quadrada) composta pelos coeficientes  $a_{ij}$ ,  $\vec{I}$  é a matriz identidade e  $\vec{x}$  o vetor coluna dos  $x_i$ . A equação (10) admite solução não-trivial, se, e somente se,

$$\det \left| \omega_0^2 \vec{a} + \omega^2 \vec{I} \right| = 0, \quad (11)$$

a qual permite obter as frequências dos modos normais de oscilação do sistema massa-mola. Importa enfatizar que estes modos normais correspondem àquelas situações em que todas os carrinhos oscilam simultaneamente com a mesma frequência (em fase ou oposição de fase). Além disso, devido ao fato de que os coeficientes das matrizes  $\vec{a}$  e  $\vec{I}$  na equação (11) são adimensionais, infere-se que as possíveis frequências  $\omega$  dos modos normais de oscilação são proporcionais a  $\omega_0$ , como exemplificado nas equações (3) e (7).

Assim, considerando-se os modos normais de oscilação, sugerimos ao professor argumentar com os seus estudantes que para fileiras com chumbadas de mesma massa, quanto maior o valor de  $k$ , ou seja, quanto mais largos forem os anéis de garrafa PET de uma fileira em relação a outra, maior será a frequência de seu modo normal de vibração. Por conseguinte, menor é o tempo de uma oscilação. Esclarecemos que esta inferência é fundamental para que se compreenda o motivo pelo qual a chumbada em contato com a fileira 1 cai antes do que aquela que está em contato com a fileira 2. Em contrapartida, o professor também deve promover outra discussão com seus estudantes a fim de realçar que nas fileiras com anéis de mesmo  $k$ , ou seja, de mesma largura, quanto maior for a massa das chumbadas de uma fileira em relação a outra, menor será a frequência de seu modo normal. Assim, esperamos que reconheçam que maior será o tempo de uma oscilação e por isso, a chumbada em contato com a fileira 3 cai por último.

Nos ensaios realizados com o aparato da Figura 1, determinou-se o intervalo de tempo entre o instante em que a régua de madeira é golpeada pelo pêndulo e aquele em que cada chumbada equilibrada na extremidade oposta leva para começar a cair, o qual denominamos de semiperíodo ( $T_{1/2}$ ), isto é, o tempo de meia

oscilação. Conforme demonstrado na Tabela 1, o  $T_{1/2}$  é menor para a fileira de chumbadas menores e anéis mais largos e maior para a fileira de chumbadas maiores e anéis mais estreitos. O valor médio do  $T_{1/2}$  e o seu respectivo desvio padrão foram calculados a partir dos dados obtidos de 5 repetições.

Na Tabela 1 também estão discriminadas a frequência de oscilação de cada fileira do aparato da Figura 1, a qual foi determinada a partir do valor medido para o  $T_{1/2}$ . Os valores obtidos permitiram a construção de um gráfico entre o quadrado da frequência ( $f^2$ ) de oscilação e a respectiva relação  $k/m$  para cada fileira (Figura 5). As incertezas associadas às grandezas apresentadas na Figura 5 foram determinadas por cálculos envolvendo a propagação de erros.

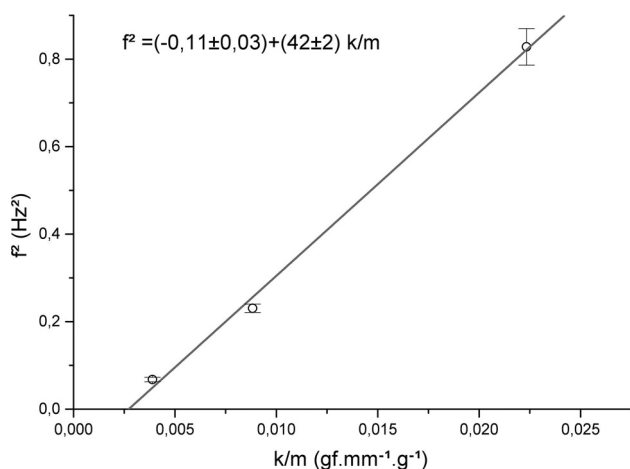
Reiteramos, por fim, que nos ensaios realizados com o simulador de propagação de ondas mecânicas (Figura 1), os correspondentes quadrados das frequências cresceram da fileira 3 para a fileira 1, em satisfatória concordância com o modelo discutido ao longo desta seção.

#### 4. Considerações finais

Depreendemos deste estudo que os anéis de garrafa PET apresentam um comportamento semelhante ao de molas lineares. De forma que um anel mais largo possui constante elástica maior do que outro mais estreito de mesmo diâmetro.

**Tabela 1:** Semiperíodo, massa das chumbadas, constante elástica dos anéis de garrafa PET e frequência de oscilação de cada fileira.

	Fileira 1	Fileira 2	Fileira 3
$T_{1/2}$ (s)	$0,55 \pm 0,02$	$1,04 \pm 0,01$	$1,94 \pm 0,01$
$m$ (g)	$38,5 \pm 0,1$	$38,5 \pm 0,1$	$87,4 \pm 0,1$
$k$ (gf/mm)	$0,86 \pm 0,03$	$0,34 \pm 0,01$	$0,34 \pm 0,01$
$f$ (Hz)	$0,91 \pm 0,03$	$0,48 \pm 0,01$	$0,26 \pm 0,01$



**Figura 5:** Quadrado da frequência de oscilação de cada fileira em função da razão entre a constante elástica do anel e a massa da chumbada.

Em nosso entendimento, as defasagens nas quedas das chumbadas equilibradas são satisfatoriamente explicadas em termos da análise de um conjunto de osciladores massa-mola acoplados. Neste modelo, o quadrado das frequências dos modos normais de oscilação é proporcional à constante elástica do anel dividida pela massa da chumbada. Destarte, quanto maior a razão  $k/m$ , menor é o tempo de uma oscilação.

Reconhecemos que um leitor mais criterioso poderia argumentar que um modelo mais realista para o aparato da Figura 1 seria o de osciladores massa-mola pendular acoplados. Contudo, como todas as fileiras possuem pêndulos de mesmo comprimento que oscilam sob pequenas amplitudes, entendemos que este fator não afeta a sequência em que as chumbadas equilibradas caem. É por esta razão que optamos pela análise do oscilador massa-mola acoplado (Figura 2).

Por fim, concluímos que o dispositivo nomeado “simulador de propagação de ondas mecânicas em meio sólido” (Figura 1) pode contribuir tanto com o processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de ondas, como bem idealizaram os autores do trabalho original [1], como também pode ser implementado no estudo prático das oscilações acopladas. Assunto frequentemente abordado nos cursos de Física, mas que, entretanto, carece de atividades experimentais.

#### Agradecimentos

Agradecemos ao Carlos Palmerio, Guilherme Honorato e Luanna Oliveira pela construção do aparato ilustrado na Figura 1, todos estudantes do curso de Engenharia Civil do Instituto Federal Goiano – Campus Rio Verde. Agradecemos também à CAPES pelo suporte financeiro, que por meio do Programa de Apoio a Laboratórios Interdisciplinares de Formação de Educadores – LIFE (Edital N° 067/2013) possibilitou a aquisição da balança utilizada neste trabalho.

#### Referências

- [1] S.L. Piubelli1, H.A. Errobidart, S.T. Gobara e N.C.G. Errobidart, Rev. Bras. Ens. Fis. **32**, 1 (2010).
- [2] <https://pt.freedownloadmanager.org/Windows-PC/Microcal-Origin.html> acessado em 12/8/2019.
- [3] F.S. da Silva e F. Castelli, Rev. Bras. Ens. Fis. **41**, 4 (2019).
- [4] N. Aranha, J.M. de Oliveira Jr, L.O. Bellio e W. Bonventi Jr, Rev. Bras. Ens. Fis. **38**, 4 (2016).
- [5] P.A. Tipler, *Física para cientistas e engenheiros* (Editora LTC, Rio de Janeiro, 2009), v. 1, 6ª ed.
- [6] H.M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica: Fluidos, Osciladores e Ondas Calor* (Editora Edgard Blücher, São Paulo, 2014), v. 2, 5ª ed.
- [7] J.R. Taylor, *Mecânica Clássica* (Editora Bookman, Porto Alegre, 2013).